座位号________ 线 姓名________ 封 班内学号________ 密 班级________ 专业________ 院(系)________

成　都　工　业　学　院

2022—2023 学年第 1 学期考试试卷

考试科目：线性代数（A 卷）考试时间：120 分钟　考试方式：闭卷

适用班级：全校本科部分专业（适用于课号：250030005）

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	总分教师	试卷复核人
得分										

注意事项：

1、满分 100 分。要求卷面整洁、字迹工整、无错别字。
2、考试必须将姓名、班级、学号完整、准确、清楚地填写在试卷规定地方，否则视为废卷。
3、考试必须在签到单上签到，若出现遗漏，后果自负。
4、如有答题纸，答案请全部填写在答题纸上，否则不给分；考完请将答题纸和试卷一同交回，否则不给分。

试　　题

得分	评阅教师

一. 判断题（每小题 2 分，共 5 小题 10 分）正确的选“T”，错误的选“F”

1. 若矩阵A,B满足$AB=O$，则有$A=O$或$B=O$.　（　　）

2. 将单位矩阵作一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵.　（　　）

3. 若行列式D有两列元素对应相等，则行列式$D=0$.　（　　）

4. 若向量组中只含一个向量，且向量组线性无关，那么向量一定为零向量.　（　　）

5. 已知n阶矩阵A,B相似，则$|A|=|B|$.　（　　）

得分	评阅教师

二. 选择题（每小题 2 分，共 10 小题 20 分）

1. 已知$f(x)=x^2-1, A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则$f(A)=$(　　).

A. $\begin{pmatrix}7&10\\15&19\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&4\\9&16\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}0&4\\9&21\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}6&10\\15&21\end{pmatrix}$

2. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,$P$为初等矩阵,且$AP=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 2a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{22}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{32}+a_{33} \end{pmatrix}$,则$P=$(　　).

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. 已知n阶矩阵A满足$A^2-2A-3I=O$,则A的逆矩阵$A^{-1}=$(　　).

A. $A-2I$　B. $2I-A$　C. $\frac{1}{3}(A-2I)$　D. $-\frac{1}{3}(A-2I)$

4. 已知n阶矩阵A,若A的行列式$|A|=3$,则$|3A^TA|=$(　　).

A. 3^{n+1}　B. 3^{n+2}　C. 3^{2n+1}　D. 3^{2n+2}

5. 已知A,B,C分别为$m\times m,m\times n,n\times n$矩阵,若$|A|=5,R(B)=3,|C|=6$,则$ABC$的秩$R(ABC)=$(　　).

A. 1　B. 5　C. 3　D. 6

6. 已知β_1,β_2,β_3是非齐次线性方程组$AX=b$的解,则下列选项中是$AX=0$的解有(　　).

A. $\beta_1+\beta_2-\beta_3$　B. $2\beta_1+3\beta_2-5\beta_3$　C. $\beta_1+\beta_2+\beta_3$　D. $2\beta_1+5\beta_2-3\beta_3$

7. 将向量$\beta=(-1,1,3)$表示成向量组$\alpha_1=(1,2,1),\alpha_2=(1,1,1),\alpha_3=(-3,-2,1)$的线性组合,则$\beta=$(　　).

A. $2\alpha_1-\alpha_2+6\alpha_3$　B. $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$　C. $4\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$　D. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

8. 已知三阶可逆矩阵A的特征值为2,3,5,则A的逆矩阵的特征值为(　　).

A. 2,3,5　B. $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5}$　C. 4,9,25　D. $\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{25}$

9. 下列矩阵与对角矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$相似的矩阵是(　　).

A. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

10. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2-8x_1x_3+2x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2$的矩阵为(　　).

A. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -7 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

得分	评阅教师

三．填空题（每小题 2 分，共 5 小题 10 分）

1. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$，则$(3A-2B)^T=$________.

2. 已知四阶行列式$|A|=\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$，则元素$w$的余子式$M_{14}$的值为________.

3. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则其伴随矩阵$A^*=$________.

4. 已知矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$为四阶方阵，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，则$A$的秩$R(A)=$________.

5. 设A为n阶矩阵，I为n阶单位矩阵，满足$|6I+3A|=0$，则A的一个特征值为________.

得分	评阅教师

四．计算题（第 1、2 小题每题 8 分，第 3、4、5、6 小题每题 9 分，共 52 分）

1. 求行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$的值.

2. 已知$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}X+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，求$X$.

3. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & -4 \\ -1 & a & 5 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$，且$A$的秩为$R(A)=2$，求$a$和矩阵的标准型.

4. 已知向量组$\alpha_1=(1,-1,0,0)^T,\alpha_2=(-1,2,1,-1)^T,\alpha_3=(0,1,1,-1)^T,\alpha_4=(-1,3,2,1)^T$,求向量组的秩和一个极大无关组,判定向量组的线性相关性,并将其余向量用该极大无关组线性表出.

5. 求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ -2x_1+x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2-2x_3=4 \end{cases}$的通解.

6. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

(1)求矩阵的特征向量和特征值;

(2)判定矩阵是否可对角化;

(3)已知多项式$f(x)=x^3+x^2+1$,求$f(A)$的特征值.

得分	评阅教师

五. 证明题 (8分)

已知A,B都是n阶方阵,A为反对称矩阵,B为对称矩阵,证明$AB-BA$为对称矩阵.

线 封 密

成都工业学院试题答案及评分标准

2022—2023 学年第 1 学期

考试科目：线性代数（A 卷） 考试时间：120 分钟 考试方式：闭卷

适用班级：全校本科部分专业（适用于课号：250030005）

一、判断题（每小题 2 分，共 5 小题 10 分）正确的选 "T"，错误的选 "F"。

1. F　2. T　3. T　4. F　5. T

二、选择题（每小题 2 分，共 10 小题 20 分）

1. D　2. A　3. C　4. B　5. C　6. B　7. D　8. B　9. B　10. A

三、填空题（每小题 2 分，共 5 小题 10 分）

1. $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -19 & 4 \\ -2 & -17 \end{pmatrix}$　2. -24　3. $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　4. 3　5. -2

四、计算题（第 1、2 小题每题 8 分，第 3、4、5、6 小题每题 9 分，共 52 分）

1. 解：$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{3分}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{2分}{=} -[1\times 3\times(-1)\times 4] \overset{2分}{=} 12(1分)$

2. 解：设 $AX+C=B$，A 可逆，则 $X=A^{-1}(B-C)$(1分)

$$(A\mid I)\overset{1分}{=}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1/3 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & 2 & 2 & 1/3 & 1/6 & -1/3 \\ 1 & -1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)=(I\mid A^{-1})(3分)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}(1分),\ X=A^{-1}(B-C)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -11 \\ 6 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}(2分)$$

3. 解：
$$A\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & a & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\xrightarrow{1分}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & a+2 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow{2分}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(2分),\ A 的秩为 R(A)=2$$

当且仅当$2-2a=0 \Rightarrow a=1$(2分),标准型为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$(或$\begin{pmatrix}I_2&O\\O&O\end{pmatrix}$)(2分)

4. 解:$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\-1&2&1&3\\0&1&1&2\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}$(2分)$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$(1分),秩为3,线性相关,

极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$(2分),$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$(2分),所以$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$(2分)

5. 解：增广矩阵$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&-2\\-2&1&1&-2\\1&1&-2&4\end{array}\right)$(1分)$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$(2分)

$\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3+2\\x_2=x_3+2\end{cases}$(1分),取$x_3$=0,得特解为$\eta=(2,2,0)^T$(2分)

取$x_3=1$导出组的基础解系为$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$(2分),所以,通解为$X=\eta+k\xi,k\in R$(1分)

6. 解:$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&3&3\\2&\lambda-3&-1\\-2&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-2)$(2分)$=0\Rightarrow\lambda_1=4$(二重),$\lambda_2=2$,(1分)

$\lambda_1=4$,特征向量$k_1(1,-1,1)^T,k_1\in R$且$k_1\neq 0$(1分),$\lambda_2=2$,特征向量$k_2(0,-1,1)^T,k_2\in R$且$k_2\neq 0$(1分)

不能对角化(1分),$f(A)=A^3+A^2+I$(1分),$f(A)$的特征值为$f(\lambda)$,分别为81,13(2分)

五．证明题（8 分）

证明：A为反对称矩阵$\Rightarrow A^T=-A$(1分),B为对称矩阵$\Rightarrow B^T=B$(1分)

$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T$(2分)$=B^TA^T-A^TB^T$(2分)$=B(-A)-(-A)B$

$=AB-BA$(1分),所以$AB-BA$为对称矩阵(1分)