《概率论第一章复习题》

一、判断题

1. × 2. × 3. √ 4. × 5. √

二、选择题

1. B 2. D 3. B 4. B 5. D 6. C 7. A 8. A 9.C 10.A

三、填空题

1. $\frac{5}{12}$

2. $\boxed{P(A)=\frac{2}{3}}$

3. $\boxed{\frac{1}{3}}$

4. 0.25

5. $\boxed{0.9}$

6. $\boxed{\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}}$; $\boxed{\frac{3\times4\times3}{4^3}=\frac{9}{16}}$

7. 0.0083

8. $\boxed{0.42}$

9. $\boxed{\frac{8}{15}}$

10. $\boxed{\frac{53}{99}}$

四、计算题

1. 将 15 名新生随机地平均分配到 3 个班级中去，这 15 名新生中有 3 名是优等生，求

（1）每个班级各分配到一名优等生的概率

（2）3 名优等生分配在同一班级的概率

解：A=每个班级各分配到一名优等生

$$P(A)=\frac{P_3^3 C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5}=\frac{25}{91}$$

B=3 名优等生分配在同一班级

$$P(B)=\frac{C_3^1 C_{12}^2 C_{10}^5 C_5^5}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5}=\frac{6}{91}$$

2.甲乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中的概率是多少?

解：设 A=“甲击中目标”，B=“乙击中目标”，M=“命中目标”，

已知 $P(A)=0.6, P(B)=0.5$, 所以

$$P(M)=P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.5-0.6\times 0.5=0.8.$$

$$P(A\mid M)=\frac{P(AM)}{P(M)}=\frac{P(A)P(M\mid A)}{P(M)}=\frac{1\times 0.6}{0.8}=0.75$$

所以现已知目标被命中，则它是甲射中的概率是 0.75

3.雨伞掉了，落在图书馆中的概率为 50% ，这种情况下找回的概率为 0.80 ；落在教室里的概率为 30% ，这种情况下找回的概率为 0.60 ；落在商场的概率为 20% ，这种情况找回的概率为 0.05 ，求：（1）找回雨伞的概率；（2）雨伞被找回，求它掉在图书馆的概率 .

解： A_i 分别表示雨伞落在图书馆，教室和商场 $i=1,2,3$ ， B 表示找回雨伞

由题意 $P(A_1)=0.5$ $P(A_2)=0.3$ $P(A_3)=0.2$

$P(B\big|A_1)=0.8$ $P(B\big|A_2)=0.6$ $P(B\big|A_3)=0.05$

1）

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\big|A_1)+P(A_2)P(B\big|A_2)+P(A_3)P(B\big|A_3)\\&=0.5\times 0.8+0.3\times 0.6+0.2\times 0.05=0.59\end{aligned}$$

2）

$$P(A_1\big|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\big|A_1)}{P(B)}=\frac{0.5\times 0.8}{0.59}\approx 0.678$$

故找回雨伞的概率为 0.59，雨伞被找回，它掉在图书馆的概率 0.678

4.假设有 3 箱同种型号零件，里面分别装有 50 件、30 件、40 件，而且一等品分别有 20 件、12 件和 24 件，现在任取一箱，再从所取的一箱中任取一个零件，试求：

（1）取出的零件是一等品的概率；

（2）若已知取出的零件是一等品，则零件来自第三箱的概率为多大？

解：设 $A_i=$ “取到第 i 箱中的零件”， $i=1,2,3$． $B=$ “取到的是一等品”

由题意知

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{20}{50}=0.4,\quad P(B\mid A_2)=\frac{12}{30}=0.4,\quad P(B\mid A_3)=\frac{24}{40}=0.6.$$

（1）由全概率公式可得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{3}(0.4+0.4+0.6)=\frac{7}{15}.$$

（2）由贝叶斯公式可得

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3)P(B\mid A_3)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.6}{\frac{7}{15}}=\frac{3}{7}.$$

5.9 支手枪中有 5 支已校准过，4 支未校准．一名射手用校准过的枪射击时，命中率为 0.9，用未校准过的枪射击时，命中率为 0.3，现从这 9 支枪中任取一支射击．

（1） 求他能命中目标的概率；

（2） 如果他命中目标，求所用的枪是校准过的概率．

解：设 $A_1=$ “所用的枪校准过”， $A_2=$ “所用的枪未校准过”， $B=$ “命中目标”，则

$$P(A_1)=5/9,\quad P(A_2)=4/9,\quad P(B\mid A_1)=0.9,\quad P(B\mid A_2)=0.3.$$

（1）由全概率公式可知

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=5/9\times 0.9+4/9\times 0.3=19/30,$$

（2）由贝叶斯公式可得

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(B\mid A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.9\times 5/9}{19/30}=\frac{15}{19}.$$

五、证明题

1. 设 A， B 为两个随机事件， $0<P(B)<1$， $P(A\mid\overline{B})=P(A\mid B)$，证明： A 与 B 相互独

立．

证明: $P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A\overline{B})}{1-P(B)}$ $\quad$ $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

$$\frac{P(A\overline{B})}{1-P(B)}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A\overline{B})P(B)=P(AB)(1-P(B))=P(AB)-P(AB)P(B)$$

$$P(AB)=P(A\overline{B})P(B)+P(AB)P(B)=(P(A\overline{B})+P(AB))P(B)=P(A)P(B)$$

2.设事件 A，B，C 的概率都是 $\frac{1}{2}$，且 $P(ABC)=P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$，证明:

$$2P(ABC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-\frac{1}{2}\ .$$

证明：因为 $P(ABC)=P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$，所以

$$P(ABC)=1-P(A\cup B\cup C)=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)]$$

将 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$ 代入上式得到

$$P(ABC)=1-[\frac{3}{2}-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)]$$

整理得

$$2P(ABC)=P(AB)+P(BC)+P(AC)-\frac{1}{2}.$$