《第三章复习题》答案

一、判断题

答案：√，√，×，√，√，

二、选择题

答案：C，C，B，B，A，C，D，

三、填空题

1） 2/7 ； 2） $a=\frac{1}{6},b=\frac{1}{3}$； 3） 6 ； 4） $\frac{3}{4}$； 5）

Z	0	1
p_k	1/9	8/9

； 6） 1；

7） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} & 0\le x\le 5,y\in R\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$； 8） $N(1,1)$；

四、计算题

1. **解：**（1） 因为 $P(XY=0)=1$，所以

$$P(XY\neq 0)=0=P(X=-1,Y=1)+P(X=1,Y=1),$$

$$P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=1)=0.$$

由联合分布律与边缘分布律的关系可得

X \ Y	0	1	$p(X=x_i)$
−1	1/4	0	1/4
0	0	1/2	1/2
1	1/4	0	1/4
$p(Y=y_j)$	1/2	1/2	1

（2）因为 $P(X=0,Y=0)=0\neq P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{4}$，

故 X 与 Y 不是相互独立的.

（3） $P\{X=0|X+Y=1\}=\dfrac{P\{X=0,X+Y=1\}}{P\{X+Y=1\}}=\dfrac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

2. 解：(1) 由 $\iint_D f(x,y)dxdy=1$， $A\int_0^1 dx\int_0^x xdy=A\int_0^1 x^2dx=1$

$A=3$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2$， $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, 0<x<1\\ 0 \quad 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2)$， $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), 0<y<1\\ 0 \quad 其他\end{cases}$

因为 $f(x,y)\neq f_Y(y)f_X(x)$　　所以 X,Y 不独立

3. 解：(1) 由分布函数的性质知，常数 A,B,C 满足

$$\begin{cases}1=F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)\\ 0=F(+\infty,-\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)\\ 0=F(-\infty,+\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

解得： $A=\frac{1}{\pi^2}$， $B=C=\frac{\pi}{2}$. 因此

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{4}\right),\quad -\infty<x,y<+\infty..$$

(2) $f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{12}{\pi^2(x^2+9)(y^2+16)}$，　$-\infty<x,y<+\infty.$

(3) $P\{Y<4\}=F(+\infty,4)=\frac{3}{4}.$

$P\{X<3,Y<4\}=F(3,4)=\frac{9}{16}.$

4. 解：(1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1 4xydy=2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 4xydx=2y, & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X , Y 独立.

（2）因为 X , Y 独立，所以

$$F\left(\frac{1}{2},2\right)=F_X\left(\frac{1}{2}\right)F_Y(2)=\int_0^{1/2}2xdx\cdot\int_0^1 2ydy=\frac{1}{4}.$$

5.解:

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$-1<x<0$ $\quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{x+1}2\,\mathrm{d}y=2x+2$

$$f_X(x)=\begin{cases}2x+2, & -1<x<0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$0<y<1$ $\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{y-1}^{0}2\,\mathrm{d}x=2-2y$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$P\left(-\frac{1}{4}<X<0,0<Y<\frac{1}{4}\right)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$$