

《第五、六章复习题》

一、单项选择题

1. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ 已知, σ^2 未知, 则不是统计量的是 ().

A. $X_1 + 5X_4$ B. $\sum_{i=1}^4 X_i - \mu$ C. $X_1 - \sigma$ D. $\sum_{i=1}^4 X_i^2$

2. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是从总体 X 中抽出的简单随机样本, 则下列错误的是 ().

- A. X_1, X_2, \dots, X_n 均与 X 同分布
B. X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立
C. 若 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 X_1, X_2, \dots, X_n 的联合分布函数为 $[F(x)]^n$
D. $\text{cov}(X_i, X_j) = 0, i \neq j$

3. 设 X_1, X_2, \dots, X_6 是来自总体 $N(6, 6)$ 的一个样本, \bar{X} , S^2 分别为其样本均值和样本方差, 则下列正确的是 ().

A. $E(\bar{X}) = 6, D(\bar{X}) = 1, E(S^2) = 6$ B. $E(\bar{X}) = 6, D(\bar{X}) = 6, E(S^2) = 1$
C. $E(\bar{X}) = 36, D(\bar{X}) = 6, E(S^2) = 1$ D. $E(\bar{X}) = 6, D(\bar{X}) = 36, E(S^2) = 1$

4. 已知 $\chi_1^2 \sim \chi^2(3), \chi_2^2 \sim \chi^2(5)$, 若 $Y = \chi_1^2 + \chi_2^2$, 则 $E(Y) = ()$.

A. 6 B. 10 C. 8 D. 16

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(0, 1)$ 的一个样本, \bar{X} , S^2 分别为其样本均值和样本方差, 则下列正确的是 ().

A. $\bar{X} \sim N(0, 1)$ B. $n\bar{X} \sim N(0, 1)$ C. $\frac{\bar{X}}{S^2} \sim t(n-1)$ D. $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$

6. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, \bar{X} 为样本均值, 令

$Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则有 $Y \sim ()$.

A. $\chi^2(n)$ B. $N(\mu, \sigma^2)$ C. $\chi^2(n-1)$ D. $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

7. 设 4, 3, 4, 3, 5, 4, 4, 5 是来自总体 $N(\mu, 2)$ 的一个样本观测值, 则 μ 的矩估计值

是 () .

- A. 4 B. 3 C. 4.5 D. 5

8. 设总体 X 服从区间 $[-\theta, \theta]$ 上均匀分布 ($\theta > 0$), x_1, \dots, x_n 为样本, 则 θ 的极大似然估计为 () .

- A. $\max\{x_1, \dots, x_n\}$ B. $\min\{x_1, \dots, x_n\}$
C. $\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ D. $\min\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

9. 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则下列正确的是 () .

- A. $X+Y$ 服从正态分布 B. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布
C. X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布 D. $\frac{X^2}{Y^2}$ 服从 F 分布

10. 若 $F \sim F(m, n)$, 则 $\frac{1}{F} \sim$ () .

- A. $F(m, n)$ B. $F(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ C. $F(n, m)$ D. $F(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$

二、填空题

1. 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_{100} 独立同分布, 且 $EX_i = 0, DX_i = 10, i = 1, 2, \dots, 100$,

令 $\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$, 则 $E\{\sum_{i=1}^{100} (X_i - \bar{X})^2\} =$ _____.

2. 设 X_1, X_2, \dots, X_6 为正态总体 $N(0, 9)$ 中抽取的简单随机样本, 当 $a =$ _____ 时, 统计

量 $Y = \frac{X_1^2}{9} + a(X_2 + X_3)^2$ 服从卡方分布, 其自由度 $n =$ _____.

3. 设 X_1, X_2, \dots, X_6 是来自总体 $N(0, 1)$ 的一个样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 X_i$, 记 $Y = X_1 - \bar{X}$,

$Z = X_6 - \bar{X}$, 则 $\text{cov}(Y, Z) =$ _____.

4. 设 0.1, 0.7, 0.2, 1, 1.9, 1.3, 1.8 是来自服从区间 $(0, \theta)$ 上的均匀分布 $U(0, \theta)$ 的样

本, θ 为未知参数, 则 θ 的矩估计 $\hat{\theta} =$ _____.

三、证明题

1. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本,

试证: (1) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$ (2) $\frac{1}{n\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \sim \chi^2(1)$

2. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 证明

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2} X_1 + \frac{2}{3} X_2 - \frac{1}{6} X_3, \hat{\mu}_2 = 2\bar{X} - X_1, \hat{\mu}_3 = \bar{X},$$

都是总体均值 μ 的无偏估计, 并进一步判断哪一个估计有效。

四、计算题

1. 已知某种能力测试的得分服从正态分布 $N(52, 6.3^2)$, 随机地抽取 36 个人参与这一测试, 求平均分落在 50.8 与 53.8 之间的概率。

2. 某镇有 25000 户家庭, 平均每户拥有汽车 1.2 辆, 标准差为 0.90 辆, 它们中 10% 没有汽车。今有 1600 户家庭的随机样本, 问在样本中 9% 和 11% 之间的家庭没有汽车的概率? (用

$\Phi(x)$ 表示)

3. 设总体 X 的分布率为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ 为未知参数, 且 $0 < \theta < \frac{1}{2}$, 利用总体的样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求 θ 的矩估计值与最大似然估计值。

4. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{6x(\theta-x)}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, 求 θ 的矩估计量。若现有总体的样本观测值 3.5, 4.4, 5.3, 4.6, 4.8, 3.7, 5.8, 3.9, 求 θ 的矩估计值。