《第五、六章复习题》

一、选择题:

1-5 C C A C D　　6-10 C A C C C

二、填空题:

1. 990　　2. $\frac{1}{18}$,2　　3. $-\frac{1}{6}$　　4.2

三、证明题:

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本,

试证: (1) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$; (2) $\frac{1}{n\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \sim \chi^2(1)$

证明: (1) $X_i \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n) \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

(2) $X_i \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}(0, n\sigma^2)$ $\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$ $\Rightarrow (\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}\sigma})^2 \sim \chi^2(1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{n\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

2.设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，证明

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{2}{3}X_2 - \frac{1}{6}X_3,\ \hat{\mu}_2 = 2\overline{X} - X_1,\ \hat{\mu}_3 = \overline{X},$$

都是总体均值 μ 的无偏估计，并进一步判断哪一个估计有效。

证明: $E(\hat{\mu}_1) = E\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{2}{3}X_2 - \frac{1}{6}X_3\right) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{2}{3}E(X_2) - \frac{1}{6}E(X_3) = \mu$

$$E(\hat{\mu}_2) = E(2\overline{X} - X_1) = 2\mu - \mu = \mu$$

$$E(\hat{\mu}_3) = E(\overline{X}) = \mu$$

故都是总体均值 μ 的无偏估计

$$D(\hat{\mu}_1) = D\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{2}{3}X_2 - \frac{1}{6}X_3\right) = \frac{1}{4}D(X_1) + \frac{4}{9}D(X_2) + \frac{1}{36}D(X_3) = \frac{13}{18}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_2) = D(2\overline{X} - X_1) = D(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - X_1) = D[(\frac{2}{n} - 1)X_1 + \frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i)]$$

$$=(\frac{2}{n}-1)^2\sigma^2+\frac{4}{n^2}(n-1)\sigma^2=\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_3)=D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

当$n>2$ 时, $\hat{\mu}_3$更有效

四、计算题:

1. 已知某种能力测试的得分服从正态分布 $N(52,6.3^2)$，随机地抽取 36 个人参与这一测试，求平均分落在 50.8 与 53.8 之间的概率．

解： 由于 $X_i\sim N(52,6.3^2)(i=1,\cdots,36)$, $\overline{X}=\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36}X_i$，

故 $E(\overline{X})=(1/36)\times36\times52=52$， $D(\overline{X})=(1/36^2)\times36\times6.3^2=(6.3/6)^2$

所以 $\overline{X}\sim N(52,(6.3/6)^2)$, 从而 $\frac{\overline{X}-52}{6.3/6}\sim N(0,1)$

于是可得

$$P\{50.8<\overline{X}<53.8\}=P\left\{\frac{50.8-52}{6.3/6}<\frac{\overline{X}-52}{6.3/6}<\frac{53.8-52}{6.3/6}\right\}$$

$$=\Phi(1.714)-\Phi(-1.143)=0.9564-(1-0.8729)=0.8293$$

2. 某镇有 25000 户家庭，平均每户拥有汽车 1.2 辆，标准差为 0.90 辆，它们中 10%没有汽车。今有 1600 户家庭的随机样本，问在样本中 9%和 11%之间的家庭没有汽车的概率？（用 $\Phi(x)$ 表示）

解:

设$X_i=\begin{cases}1 & 第i个样本家庭无汽车\\ 0 & 第i个样本家庭有汽车\end{cases}(i=1,2,\cdots,1600)$

$\mu=E(X_i)=0.1$， $\sigma=\sqrt{D(X_i)}=\sqrt{0.1\times0.9}=0.3$

$$\overline{X}\sim N(0.1,\frac{0.3^2}{1600})\Rightarrow\frac{40(\overline{X}-0.1)}{0.3}\sim N(0,1)$$

$$P(0.09\le\overline{X}\le0.11)=P(\frac{40(0.09-0.1)}{0.3}\le\frac{40(\overline{X}-0.1)}{0.3}\le\frac{40(0.11-0.1)}{0.3})$$

$$=\Phi(\frac{4}{3})-\Phi(-\frac{4}{3})=2\Phi(\frac{4}{3})-1$$

3.设总体 X 的分布率为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中θ为未知参数，且$0<\theta<\frac{1}{2}$，利用总体的样本值$3,1,3,0,3,1,2,3$，求θ的矩估计值与最大似然估计值．

解：$E(X)=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$

$$\theta=\frac{3-E(X)}{4}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{4}$$

$$\overline{x}=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$$

θ的矩估计值$\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.

根据给定样本，可构造样本的似然函数$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$

取对数　$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$

求导　$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0$

$$\theta_1=\frac{7+\sqrt{13}}{12},\ \theta_2=\frac{7-\sqrt{13}}{12}\quad\because 0<\theta<\frac{1}{2}$$

解得最大似然估计值　$\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

4.设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{6x(\theta-x)}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中θ为未知参数，求θ的矩估计量．若现有总体的样本观测值$3.5, 4.4, 5.3, 4.6, 4.8, 3.7, 5.8, 3.9$，求$\theta$的矩估计值.

解：总体的一阶矩为

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^2(\theta - x)}{\theta^3}\,dx = \frac{\theta}{2},$$

解得：$\theta = 2\mu_1$.

用样本一阶矩 $A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ 代替总体一阶矩 μ_1，可得θ矩估计量为$\hat{\theta} = 2\overline{X}$.

由样本观测值计算得 $\overline{x} = \frac{1}{8}(3.5 + 4.4 + 5.3 + 4.6 + 4.8 + 3.7 + 5.8 + 3.9) = 4.5$,

因此，θ矩估计值为 $\hat{\theta} = 2\overline{x} = 9$.